Chute verticale SM examens

2009

Le but de cet exercice est de modéliser la force de frottements visqueux exercée par le glycérol sur un solide, à partir de l'étude de chute verticale d'une bille métallique de masse m et de rayon r dans le glycérol.

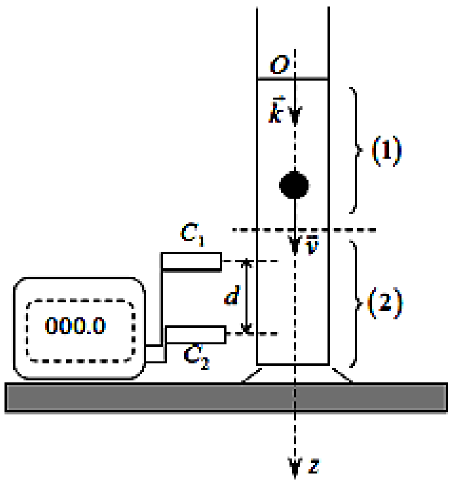
<u>On donne :</u>

- Rayon de la bille : $r = 1$ cm ; Volume de la bille : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
- Masses volumiques :
  - Métal constituant la bille : $\rho_1 = 2{,}7.10^3$ kg.m^{-3} ;
  - Glycérol : $\rho_2 = 1{,}26.10^3$ kg.m^{-3} ;
- Accélération de la pesanteur : $g = 9{,}81$ m.s^{-2}.
- On rappelle que l'expression de la poussée d'Archimède exercée par le glycérol sur la bille est : $F = \rho_2.V.g$.
- On modélise la force de frottements visqueux exercée sur la bille au cour de sa chute dans le glycérol par : $\vec{f} = -9\pi r v^n \vec{k}$ où n est un entier naturel et v la vitesse du centre d'inertie de la bille.

On lâche la bille sans vitesse initiale, à partir du point O, origine d'un axe vertical descendant $(O,\vec{k})$, à l'instant t = 0. Son mouvement dans le glycérol se fait suivant deux phases :

- <u>Phase 1 :</u> Phase du régime initial entre deux instant t_0 et t_1 où la valeur de la vitesse croit.
- <u>Phase 2 :</u> Phase du régime permanent à partir de l'instant t_1 auquel la vitesse atteint une valeur limite v_L.

Le dispositif constitué d'un chronomètre et deux cellules C_1 et C_2 permet de mesurer la durée Δt nécessaire à la bille pour parcourir la distance d au cour de la 2ème phase. (figure ci-contre)



1- Déterminer la valeur de la vitesse limite v_L sachant que $\Delta t = 956$ ms.

2- Par application de la deuxième loi de Newton, montrer que l'équation différentielle réalisée par la vitesse v du centre d'inertie de la bille au cour du mouvement dans le liquide s'écrit sous la forme : $\frac{dv}{dt} + A v^n = B$

Avec : $A = \frac{27}{4.\rho_1.r^2}$ et $B = g(\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1})$.

3- Trouver à partir de l'équation différentielle v_L^n en fonction de ρ_1, ρ_2, r et g.

4- En déduire la valeur de n.

2010

1ère partie (2,75 points):Chute verticale d'un solide

Tout corps immergé dans un fluide est soumis à la poussée fluide , d'Archimède, et s'il est en mouvement de translation dans ce fluide il est soumis en plus à une force de frottement fluide .

Le but de cet exercice est d'étudier l'évolution de la vitesse de deux billes (a) et (b) en verre homogène de rayons différents en mouvement de translation dans une huile avec une vitesse relativement faible .

Données :

Masse volumique du verre : $\rho = 2600\ kg.m^{-3}$;
Masse volumique de l'huile : $\rho_0 = 970\ kg.m^{-3}$;
Viscosité de l'huile : $\eta = 8,0.10^{-2}\ N.m^{-2}.s$;
Accélération de la pesanteur : $g = 9,81 m.s^{-2}$.

L'expression du volume d'une sphère de rayon r : $V = \frac{4}{3}\pi.r^3$

On abandonne au même instant t = 0 les deux billes (a) et (b) à la surface d'une huile contenue dans un tube cylindrique vertical transparent .La hauteur d'huile dans le tube est H = 1,00 m, figure(1)

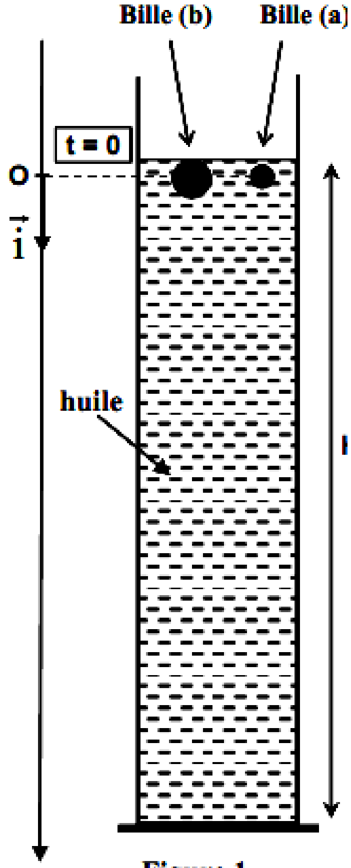


Figure 1

1-Etude du mouvement de la bille (a)

La bille (a) est soumise pendant son mouvement par rapport au repère $(O, \vec{i})$ lié à la terre aux forces :

- La poussée d'Archimède : $\vec{F} = -\rho_0.V.g.\vec{i}$
- La force de frottement fluide : $\vec{f} = -6\pi\eta.r.v.\vec{i}$
- Son poids : $\vec{P} = m.g.\vec{i}$

On désigne par τ le temps caractéristique du mouvement de la bille (a) et on considère que la vitesse limite de la bille est atteinte au bout d'une durée de 5τ .

1.1- Etablir l'équation différentielle $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = C$ du mouvement de la bille (a) et préciser les expressions de τ et de C . Calculer τ sachant que r = 0,25 cm .

1.2- Calculer la valeur de la vitesse limite v_ℓ de la bille (a).

2011

L'objectif de cet exercice est d'étudier le mouvement de chute verticale d'une bille métallique dans l'air et dans un liquide visqueux.

Donnée :

- La masse volumique de la bille : $\rho_1 = 2,70.10^3\ kg.m^{-3}$;
- La masse volumique du liquide visqueux : $\rho_2 = 1,26.10^3\ kg.m^{-3}$;
- Le volume de la bille : $V = 4,20.10^{-6}\ m^3$
- Accélération de la pesanteur : $g = 9,80 m.s^{-2}$

A l'instant t=0 on libère la bille d'un point O confondu avec son centre d'inertieG .
Le point O se trouve à une hauteur H de la surface libre du liquide visqueux qui se trouve dans un tube transparent vertical (figure 1).
La courbe de la figure (2) représente l'évolution de la vitesse v du centre d'inertie G de la bille au cours de sa chute dans l'air et dans le liquide visqueux.

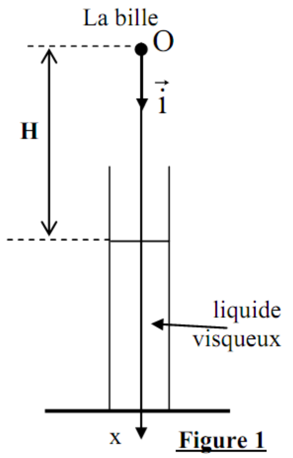


Figure 1

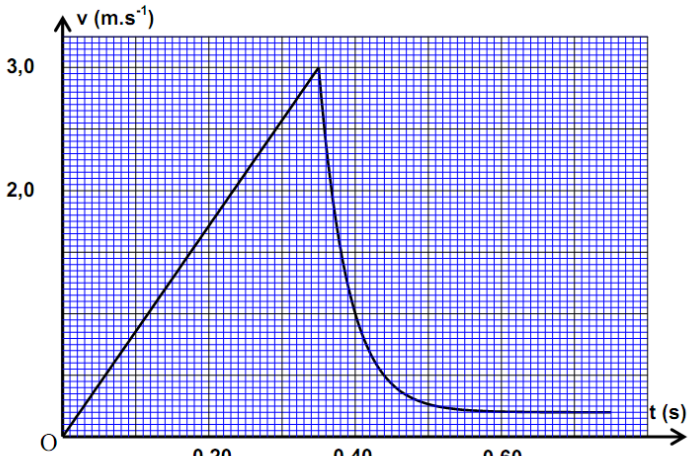


Figure2

1- Etude du mouvement de la bille dans l'air.

On modélise l'action de l'air sur la bille au cours de sa chute par une force verticale $\vec{R}$ d'intensité R constante .

On néglige le rayon de la bille devant la hauteur H .

Le centre d'inertie de la bille atteint la surface libre du liquide visqueux à un instant t_1 avec une vitesse v_1 .

1.1- En appliquant la deuxième loi de Newton , exprimer R en fonction de V ,ρ_1 , g , v_1 et t_1 .

1.2- En exploitant la courbe v=f(t) , calculer la valeur de R .

2- Etude du mouvement de la bille dans le liquide visqueux .

La bille est soumise pendant sa chute dans le liquide visqueux , en plus de son poids aux forces :

- Poussée d'Archimède : $\vec{F} = -\rho_2.V.g.\vec{i}$
- Force de frottement visqueux : $\vec{f} = -k.v.\vec{i}$ avec k constante positive .

On modélise l'évolution de la vitesse v du centre d'inertie de la bille, dans le système international des unités, par l'équation différentielle $\frac{dv}{dt} = 5,2 - 26.v$ (1)

2.1- Trouver l'équation différentielle littérale vérifiée par la vitesse v du centre d'inertie de la bille en fonction des données du texte.

2.2- En utilisant cette équation différentielle littérale et le graphe de la figure 2 ,vérifier que l'équation différentielle (1) est correcte.

2.3- En utilisant l'équation aux dimensions, déterminer la dimension de la constante k.
Calculer la valeur de k

2.4- sachant que la vitesse du centre d'inertie de la bille dans le liquide visqueux à un instant t_i est v_i=2,38 m.s^{-1} ; établir à l'aide de la méthode d'Euler que l'expression de la vitesse de G à l'instant $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ est : $v_{i+1} = (1-26\Delta t).v_i + 5,20\Delta t$ avec Δt le pas du calcul .

Calculer v_{i+1} dans le cas où Δt = 5,00 ms.

2012

Première partie : (2,5 points) Mouvement de chute d'un parachutiste

Après un cours moment de son saut d'un avion, le parachutiste ouvre son parachute pour freiner son mouvement , ce qui lui permet d'arriver au sol en toute sécurité .
L'objectif de cette partie est l'étude du mouvement vertical d'un parachutiste après l'ouverture de son parachute.

Données : - Masse du parachutiste et ses accessoires : m = 100 kg
- On considère que l'accélération de la pesanteur est constante : g = 9,8 m.s^{-2} .

Un parachutiste accompagné de ses accessoires saute avec une vitesse initiale négligeable d'un hélicoptère immobile se trouvant à une hauteur h du sol ,. Le parachutiste ouvre son parachute au moment où sa vitesse atteint 52 m.s^{-1} à un instant considéré comme origine des dates. Le système (S) formé par le parachutiste et ses accessoires prend alors un mouvement de translation vertical.

On étudie le mouvement du système (S) dans un repère galiléen $(O, \vec{k})$ lié à la terre, vertical et orienté vers le bas (figure 1).

L'air exerce sur le système (S) une force que l'on modélise, par une force de frottement d'intensité $f = k.v^2$ avec k une constante et v la vitesse du parachutiste .

On néglige la poussée d'Archimède exercée par l'air.

La courbe de la figure 2 représente la variation de la vitesse v en fonction du temps après l'ouverture du parachute.

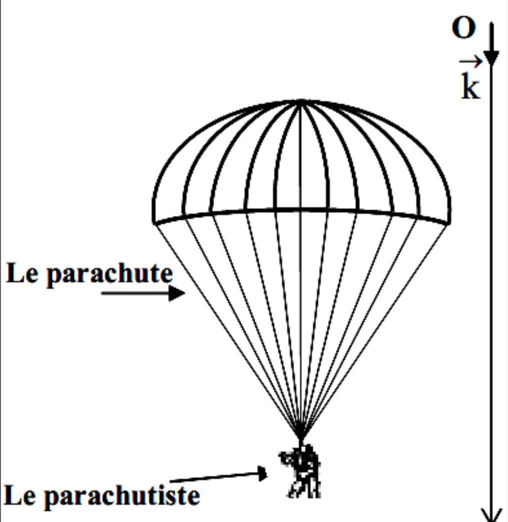


Figure 1

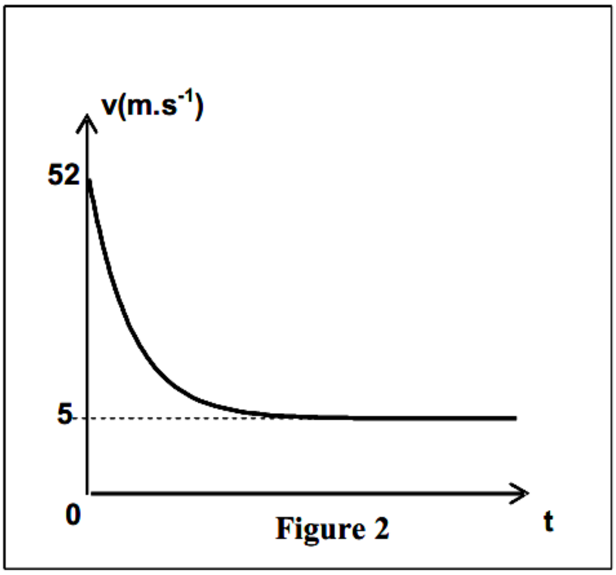


Figure 2

1- Montrer que l'équation différentielle que vérifie la vitesse v s'écrit sous la forme $\frac{dv}{dt} = g.(1 - \frac{v^2}{\alpha^2})$ en précisant l'expression de α en fonction de m, g et k.

2 – Choisir la bonne réponse et justifier :

La grandeur α représente :

a- la vitesse du système (S) à l'instant t=0 .

b- l'accélération du mouvement du système (S) à l'instant t=0.

c- la vitesse limite du système (S) .

d- l'accélération du mouvement du système (S) dans le régime permanent.

3- Déterminer la valeur de α . En déduire la valeur de k en précisant son unité dans le système international .

4- Pour tracer la courbe v(t) de la figure2 on peut utiliser la méthode d'Euler avec un pas de calcul Δt. Soient v_n la vitesse du parachutiste à l'instant t_n , et v_{n+1} sa vitesse à l'instant $t_{n+1}=t_n+\Delta t$ telles que $v_{n+1} = -7{,}84.10^{-2}.v_n^2 + v_n + 1{,}96$ avec v_n et v_{n+1} en m.s^{-1} . Déterminer le pas Δt .

2013

Première partie $(3{,}25\,points)$: de l'étude de la chute libre à la chute avec frottement

Newton a supposé que tous les corps ont même mouvement de chute quelque soit leur masses **.** Pour vérifier cette hypothèse Newton a réalisé l' expérience de chute dans un tube vide en utilisant des corps de masse et de forme différentes et en déduit que ce sont les forces de frottement fluides qui sont responsables de la différence des vitesses de chute des corps verre la Terre.

Ahmed et Myriam ont décidé de vérifier expérimentalement la déduction de Newton, pour cela ils ont utilisé deux billes en verre (a) et (b) ayant le même volume V et la même masse m .

Ils abandonnent les deux billes au même instant $t = 0$ et sans vitesse initiale d'une même hauteur h du sol (fig 1) **.**

- Ahmed a lâché la bille (a) dans l'air ;
- Myriam a lâché la bille (b) dans un tube transparent contenant de l'eau de hauteur h (fig 1).

A l'aide d'un dispositif convenable Ahmed et Myriam ont obtenu les résultats suivants :

- La bille (a) atteint le sol à l'instant $t_a = 0,41s$;
- La bille (b) atteint le sol à l'instant $t_b = 1,1\ s$.

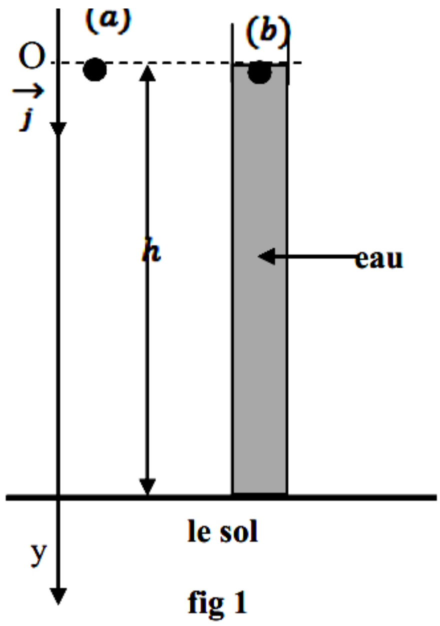


fig 1

Données : accélération de la pesanteur $g = 9,80 m.s^{-2}$;

$m = 6,0.10^{-3} kg$; $V = 2,57.10^{-6} m^3$;

la masse volumique de l'eau $\rho = 1000 kg.m^{-3}$.

On suppose que la bille (a) n'est soumise au cours de sa chute dans l'air qu' à son poids.

La bille (b) est soumise au cours de sa chute dans l'eau à :

- Son poids d'intensité $P = mg$;
- La poussé d'Archimède d'intensité $F_A = \rho.g.V$;
- La force de frottement fluide d'intensité $f = K.v^2$ avec K une constante positive et v vitesse du centre d'inertie de la bille .

1- Étude du mouvement de la bille (a) dans l'air

1.1- Établir l'équation différentielle que vitrifie la vitesse du centre d'inertie de la bille (a) au cours de la chute.

1.2- Calculer la valeur de la hauteur **h** .

2- Étude du mouvement de la bille (b) dans l'eau

Myriam a enregistré à l'aide d'un dispositif convenable L'évolution de la vitesse de la bille (b) au cours du temps ; Elle a obtenu le graphe représenté dans la figure 2.

2.1-Établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse du centre d'inertie de la bille (b) au cours de sa chute dans l'eau en fonction des donnés du texte.

2.2- A l'aide du graphe de la figure 2,déterminer la valeur de la constant K.

2.3- Trouver l'expression de l'accélération a_0 du centre d'inertie de la bille (b) à l'instant $t = 0$ en fonction de g , V , ρ et m . Déterminer le temps caractéristique du mouvement de la bille (b) .

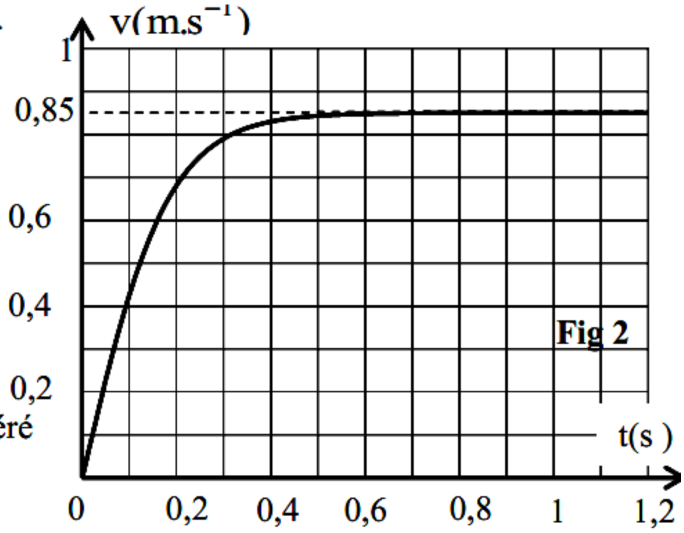


Fig 2

3- la différence entre les durées de chute

Ahmed et Myriam ont répété leur expérience dans les Conditions précédentes mais cette fois la hauteur D'eau dans le tube est $H = 2h$ .Ahmed et Myriam ont libéré des deux billes (a) et (b) sans vitesse initiale au même instant $t = 0$ du même hauteur $H = 2h$.

a- Exprimer Δt qui sépare l'arrivé des deux billes (a) et (b) au sol en fonction de t_a , t_b ,g, h et v_ℓ .

b- Calculer la valeur de Δt

2014

PREMIERE PARTIE(2,75points) : Etude du mouvement d'une bille dans un fluide visqueux

On étudie le mouvement d'une bille en acier dans un fluide visqueux contenu dans une éprouvette graduée (fig1).

La figure (1) donne une idée sur le montage utilisé sans tenir compte de l'échelle.

On libère la bille sans vitesse initiale à un instant t = 0 et au même instant commence la saisie des images par un webcam reliée à un ordinateur. La position instantanée du centre d'inertie G est repérée sur un axe vertical Ox orienté vers le bas et de vecteur unitaire $\vec{i}$;fig (1). A t=0 , le centre d'inertie G est au point G_0 d'abscisse x=0.

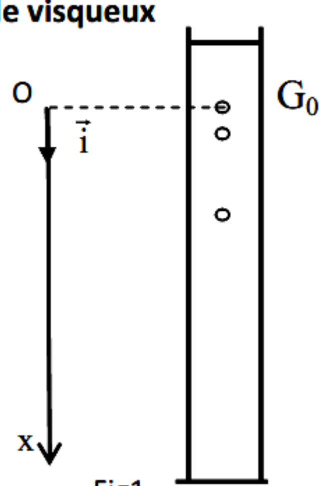


Fig1

On représente à chaque instant le vecteur vitesse du centre d'inertie de la bille par $\vec{v} = v.\vec{i}$.
L'analyse de la vidéo obtenue à l'aide d'un logiciel approprié permet de calculer à chaque instant t la vitesse v du centre d'inertie de la bille .La courbe de la figure 2 représente l'évolution de v au cours du temps.

On représente par V et **m** respectivement le volume et la masse de la bille et par ρ_a et ρ_s respectivement la masse volumique de la bille et celle de du liquide visqueux et par g l'intensité de pesanteur .

Au cours de sa chute , la bille est soumise à :

-La force de frottement fluide : $\vec{f} = -h.v.\vec{i}$; h est le coefficient de frottement visqueux.

-La poussée d'Archimède : $\vec{F} = -\rho_s.V.\vec{g}$;

-Son poids : $m\vec{g} = -\rho_a.V.\vec{g}$.

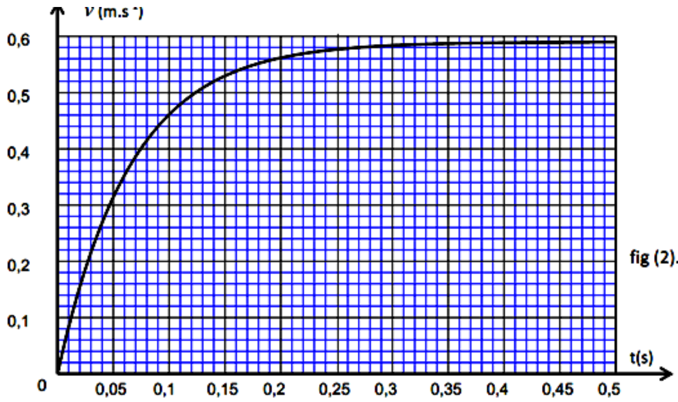


fig (2).

1- Al 'aide de la courbe de la figure (2) , montrer l'existence d'une vitesse limite et déterminer sa valeur expérimentale .

2- Représenter , sur un schéma sans échelle ,les vecteurs forces appliqués sur la bille en mouvement dans le fluide.

3- Etablir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse v(t) et montrer qu'elle, s'écrit sous la forme

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{h}{m}.v + \alpha.g$$ en précisant l'expression de α .

4- Vérifier que la fonction $v(t) = \alpha.g.\frac{m}{h}\left[1 - e^{-\frac{h}{m}}\right]$ est solution de cette équation différentielle.

5- Montrer ,à partir de l'équation différentielle ou à partir de sa solution l'existence d'un e vitesse limite et calculer sa valeur et la comparer avec la valeur trouvée expérimentalement .

On donne : $m = 5,0g$; $g = 9,81m.s^{-2}$; $h = 7,60.10^{-2}kg.s^{-1}$; $\alpha = 0,92$.

6-Déterminer à l'aide de l'analyse dimensionnelle l'unité de $\frac{m}{h}$ et déterminer sa valeur à partir de l'enregistrement.

2015

Partie I : Etude de la chute verticale d'une bille avec frottement

On se propose , dans cette partie, d'étudier le mouvement du centre d'inertie G d'une bille, homogène de masse m, dans une éprouvette remplie d'un liquide visqueux.

On repère la position de G à tout instant par la coordonnée z de l'axe vertical $(O,\vec{k})$ dirigé vers le bas. L'origine de l'axe est confondue avec le point O_1 de la surface libre du liquide.

A l'instant de date t_0, prise comme origine des dates $(t_0 = 0)$, on lâche la bille sans vitesse initiale d'une position où G est confondu avec G_0 de coordonnée $z_0 = 3\,cm$. (figure ci-dessous).

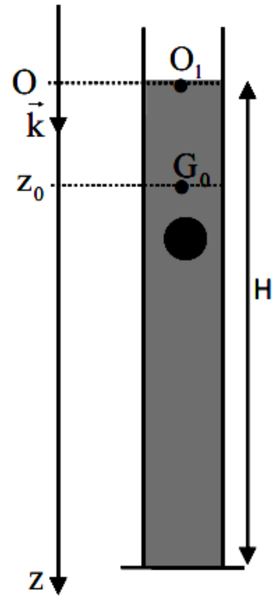
Au cours de sa chute dans le liquide, la bille est soumise, en plus de son poids, à :

-la force de frottement fluide : $\vec{f} = -\lambda.v.\vec{k}$ où λ est le coefficient de frottement fluide et v la vitesse de G à un instant t ;

-la poussée d'Archimède: $\vec{F} = -\rho_\ell.V_S.\vec{g}$ où g est l'intensité de la pesanteur, V_S le volume de la bille et ρ_ℓ la masse volumique du liquide.

On prend : $g = 9,8\,m.s^{-2}$; $\dfrac{\lambda}{\rho_S.V_S} = 12,4$ S.I ; $\dfrac{\rho_\ell}{\rho_S} = 0,15$;

ρ_S est la masse volumique de la matière constituant la bille .



1- Montrer que l'équation différentielle régissant la vitesse de G s'écrit :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\lambda}{\rho_S V_S} v = g\left(1 - \frac{\rho_\ell}{\rho_S}\right).$$

2- Déterminer la valeur a_0 de l'accélération de G à l'instant $t_0 = 0$.

3- Trouver la valeur v_ℓ de la vitesse limite du mouvement de G .

4- Soient v_1 la valeur de la vitesse de G à l'instant $t_1 = t_0 + \Delta t$ et v_2 sa valeur à l'instant $t_2 = t_1 + \Delta t$ avec Δt le pas de calcul. En utilisant la méthode d'Euler, montrer que : $\dfrac{v_2}{v_1} = 2 - \dfrac{\Delta t}{\tau}$ où τ représente le temps caractéristique du mouvement :

$\tau = \dfrac{\rho_S.V_S}{\lambda}$ .Calculer v_1 et v_2 .On prend $\Delta t = 8.10^{-3}\,s$.

5- La solution de l'équation différentielle s'écrit sous la forme $v = v_\ell.\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$; déterminer la valeur de la date t_ℓ à laquelle la vitesse de G atteint $99\ \%$ de sa valeur limite.

6- Trouver la distance d parcourue par la bille pendant le régime transitoire, sachant que la hauteur H du liquide dans l'éprouvette est $H = 79,6\,cm$ et que la durée du mouvement de la bille dans le liquide à partir de G_0 jusqu'au fond de l'éprouvette est $\Delta t_f = 1,14\,s$. (on considère que le régime permanent est atteint à partir de t_ℓ et on néglige le rayon de la bille devant H).

2016

PartieI : Etude de la chute de deux boules dans l'air

Galilée, homme de sciences italien, s'intéressa à l'étude de la chute de divers corps. Selon la légende , il aurait effectué cette étude en lâchant ces corps du sommet de la tour de Pise.

Pour vérifier certains résultats avancés par Galilée, on se propose d'étudier dans cette partie la chute dans l'air de deux boules ayant le même rayon et des masses volumiques différentes .

L'étude du mouvement de chaque boule s'effectue dans un repère $R(O,\vec{k})$ associé à un référentiel terrestre supposé galiléen. On repère, à chaque instant, la position du centre d'inertie de chacune des deux boules par la côte z sur l'axe vertical $(O,\vec{k})$ orienté vers le haut et dont l'origine est prise au niveau du sol (figure 1).

Chaque boule est soumise, durant sa chute, à son poids $\vec{P}$ et à la force de frottement fluide $\vec{f}$ (On néglige la poussée d'Archimède devant ces deux forces).

On admet que l'intensité de la force $\vec{f}$ s'écrit : $f=0,22.\rho_{air}.\pi.R^2.v_z^2$ où ρ_{air} est la masse volumique de l'air , R le rayon de la boule et v_z la valeur algébrique de la vitesse du centre d'inertie G de la boule à un instant t .

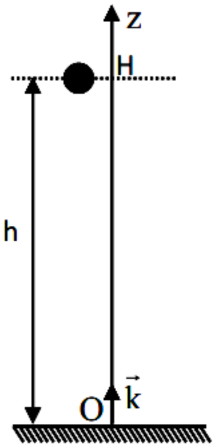


Figure 1

Données :

- Le volume d'une boule de rayon R est $V=\frac{4}{3}.\pi.R^3$,
- L'intensité de la pesanteur $g=9,8\,m.s^{-2}$,
- La masse volumique de l'air $\rho_{air}=1,3\,kg.m^{-3}$.

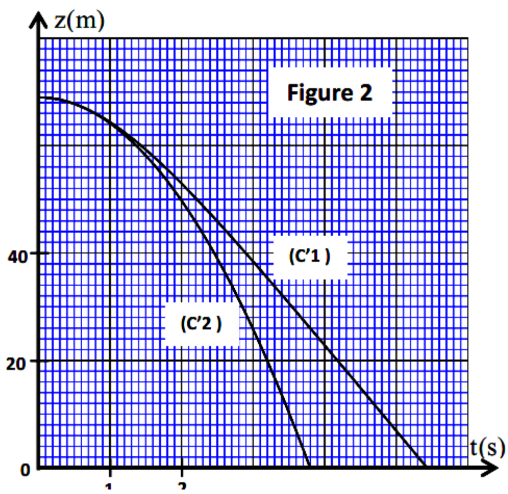
Cette étude est effectuée avec deux boules (a) et (b) homogènes ayant le même rayon $R=6\,cm$ et des masses volumiques respectives $\rho_1=1,14.10^4\,kg.m^{-3}$ et $\rho_2=94\,kg.m^{-3}$.

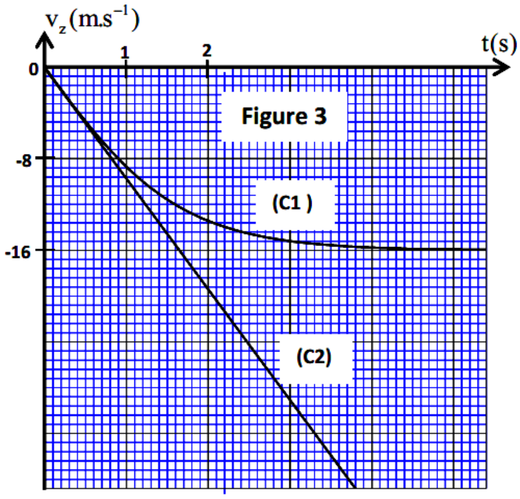
Les deux boules sont lâchées au même instant $t=0$, sans vitesse initiale, du même plan horizontal auquel appartient le point H. Ce plan est situé à une hauteur $h=69\,m$ du sol (figure 1).

1-Montrer que l'équation différentielle vérifiée par la vitesse v_z du centre d'inertie d'une boule s'écrit : $\frac{dv_z}{dt}=-g+0,165.\frac{\rho_{air}}{R.\rho_i}.v_z^2$, où ρ_i désigne la masse volumique de la boule (a) ou (b) .

2-Déduire l'expression de la vitesse limite du mouvement d'une boule .

3-Les courbes obtenues sur les figures 2 et 3 représentent l'évolution de la côte $z(t)$ et de la vitesse $v_z(t)$ du centre d'inertie G de chacune des deux boules, au cours de la chute.





3-1- Montrer, à l'aide de l'expression de la vitesse limite, que la courbe **(C1)** correspond aux variations de la vitesse de la boule (b) .

3-2-Expliquer pourquoi la courbe **(C'2)** correspond aux variations de la côte de la boule (a) .

4-Déterminer, à l'aide de la courbe **(C2)** , la nature du mouvement de la boule (a) et écrire son équation horaire $z(t)$.

5- Déterminer la différence d'altitude d entre les centres d'inertie des deux boules à l'instant où la première boule touche le sol (On néglige les dimensions des deux boules).

6- Sachant que la valeur algébrique de la vitesse de la boule (b) à l'instant de date t_n est $v_{zn} = -11,47\,m.s^{-1}$, trouver, en utilisant la méthode d'Euler, la valeur de l'accélération a_{zn} du mouvement à l'instant de date t_n et la vitesse $v_{z(n+1)}$ à l'instant de date t_{n+1}. On prend le pas du calcul $\Delta t = 125\,ms$.

2017

Partie I : Etude du mouvement de chute de deux corps

Dans cette partie, on étudie le mouvement de chute de deux corps (A) et (B) dans le repère orthonormé $R(O,\vec{i},\vec{j})$ lié à un référentiel terrestre supposé galiléen. Le point O est situé au niveau du sol (figure 1).
On néglige la poussée d'Archimède devant les autres forces et on prend l'intensité de la pesanteur : $g = 10\,m.s^{-2}$.

1-Etude de la chute d'un corps avec frottement :

A un instant choisi comme origine des dates ($t = 0$), on lâche, sans vitesse initiale d'un point H, un corps solide (A) de masse $m_A = 0,5\,kg$ et de centre d'inertie G_A (figure 1).

En plus de son poids, le solide (A) est soumis à une force de frottement fluide $\vec{f} = -k.\overrightarrow{v_A}$ où $\overrightarrow{v_A}$ est le vecteur vitesse de G_A à un instant t et k une constante positive ($k > 0$).

1-1- Montrer que l'équation différentielle du mouvement vérifiée par la composante $v_{Ay}(t)$ selon l'axe (Oy) du vecteur vitesse $\overrightarrow{v_A}(t)$ s'écrit :
$\frac{dv_{Ay}}{dt} + \frac{1}{\tau} v_{Ay} + g = 0$ où τ représente le temps caractéristique du mouvement.

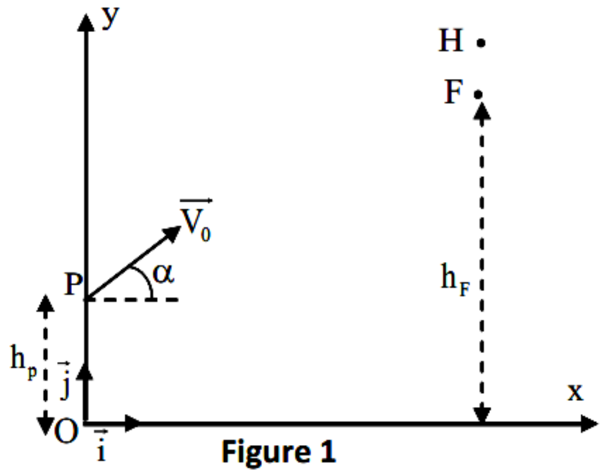


Figure 1

1-2-La courbe de la figure 2 représente l'évolution de $v_{Ay}(t)$ au cours du temps.
Déterminer τ et déduire la valeur de k.

1-3-Déterminer, en utilisant la méthode d'Euler, la vitesse $v_{Ay}(t_i)$ à un instant t_i sachant que l'accélération à l'instant t_{i-1} est $a_{Ay}(t_{i-1}) = -4,089\,m.s^{-2}$ et que le pas de calcul est $\Delta t = 0,01\,s$.

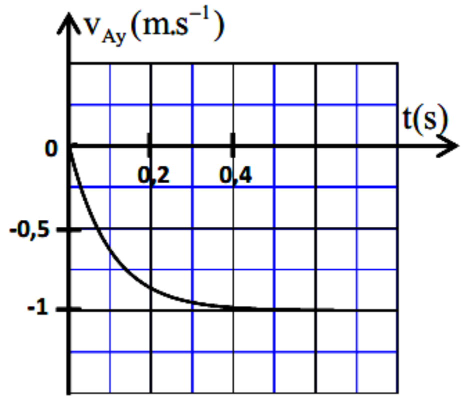


Figure 2

2-Etude du mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur :

A l'instant où le centre d'inertie G_A du corps (A) passe par le point F d'altitude $h_F = 18,5\,m$ par rapport au sol, on lance un projectile (B), de masse m_B et de centre d'inertie G_B, d'un point P de coordonnées $(0, h_p)$ avec une vitesse initiale $\overrightarrow{V_0}$ faisant un angle α $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$ avec l'horizontale(figure 1). On choisit cet instant comme nouvelle origine des dates ($t=0$) pour le mouvement de (A) et celui de (B).

On néglige les frottements pour le projectile (B) et on donne : $h_P = 1{,}8\,m$; $V_0 = 20\,m.s^{-1}$.

2-1-Etablir les équations horaires $x_B(t)$ et $y_B(t)$ du mouvement de (B) en fonction de α et t.

2-2-Exprimer les coordonnées du point S, sommet de la trajectoire de (B), en fonction de α.

3-Les deux corps (A) et (B) se rencontrent au point S (on considère que G_A coïncide avec G_B en S). Déterminer l'angle α correspondant sachant que le corps (A) passe par F avec sa vitesse limite et que les mouvements de (A) et (B) s'effectuent dans le même plan (xOy).

2018

Partie I :Etude du mouvement d'un corps solide dans l'air et dans un liquide

On trouve dans les piscines des plongeoirs à partir desquels chutent les baigneurs pour plonger dans l'eau.

Dans cette partie de l'exercice, on étudiera le mouvement d'un baigneur dans l'air et dans l'eau.

On modélise le baigneur par un corps solide (S) de masse m et de centre d'inertie G.

On étudie le mouvement du centre G dans un repère $R(O,\vec{k})$ lié à un référentiel terrestre supposé galiléen(figure 1).

Données : $m = 80\,kg$; intensité de la pesanteur : $g = 10\,m.s^{-2}$. On prend $\sqrt{2} = 1{,}4$.

1- Etude du mouvement du centre G dans l'air

A l'instant de date t_0, pris comme origine des dates ($t_0 = 0$), le baigneur se laisse chuter sans vitesse initiale d'un plongeoir. On considère qu'il est en chute libre durant son mouvement dans l'air. A la date t_0 le centre d'inertie G coïncide avec l'origine O du repère $R(O,\vec{k})$ ($z_G = 0$) et est situé à une hauteur $h = 10\,m$ au dessus de la surface de l'eau(figure 1).

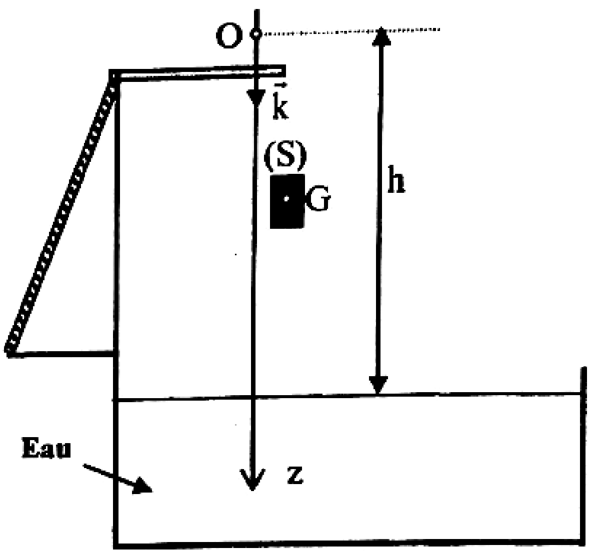


Figure 1

1-1-Etablir l'équation différentielle régissant la vitesse v_z du centre d'inertie G.

1-2 -Déterminer le temps de chute t_c de G dans l'air puis en déduire sa vitesse v_e d'entrée dans l'eau.

2- Etude du mouvement vertical du centre d'inertie G dans l'eau

Le baigneur arrive avec la vitesse $\overline{v_e}$, de direction verticale, à l'entrée dans l'eau. Lorsqu'il est dans l'eau, il suit une trajectoire verticale où il est soumis à l'action de:

- son poids $\vec{P}$,

-la force de frottement fluide : $\vec{f} = -\lambda.\vec{v}$ où λ est le coefficient de frottement fluide($\lambda = 250\,kg.s^{-1}$) et $\vec{v}$ le vecteur vitesse de G à un instant t,

-la poussée d'Archimède : $\vec{F} = -\frac{m}{d}.\vec{g}$ où g est l'intensité de la pesanteur et $d = 0{,}9$ la densité du baigneur.

On considère l'instant d'entrée de (S) dans l'eau comme nouvelle origine des dates($t=0$).

2-1-Etablir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse v_z de G . On posera $\tau=\frac{m}{\lambda}$.

2-2- Déduire l'expression de la vitesse limite $v_{\ell z}$ en fonction de τ, g , et d .Calculer sa valeur.

2-3- La solution de l'équation différentielle est $v_z(t)=A+Be^{-\frac{t}{\tau}}$, où A et B sont des constantes . Exprimer A en fonction de $v_{\ell z}$ et B en fonction de $v_{\ell z}$ et V_e.

2-4-Déterminer l'instant t_r auquel le mouvement du baigneur change de sens.(Le baigneur n'atteint pas le fond de la piscine).